**CAPÍTULO III: DERIVADA DE UNA FUNCIÓN**

* **Incremento**

Cuando un cierto valor sufre un cambio decimos que ha tenido un incremento.

Por ejemplo si la temperatura a las 12hs era de 20 °C, y a las 14hs es de 23°C, decimos que ha tenido un incremento de 3°C.

**En matemática, al incremento lo anotamos con la letra Δ, y se calcula como:**

**Δ = valor final - valor inicial**

En el ejemplo anterior : ΔT = 23°C - 20°C = 3°C

Cabe aclarar que matemáticamente hablando, INCREMENTO NO SIGNIFICA AUMENTO, sino CAMBIO.

Si el incremento es positivo significa que hubo aumento, pero si es negativo, significa que hubo disminución.

En el caso de las funciones, estamos relacionando dos variables, una independiente (x) y otra dependiente ( y ). Cualquier incremento en la variable **x ,**  puede producir un incremento en la variable **y**.

Al cambio en los valores de **x** lo indicaremos como **Δx**, y al cambio en los valores de **y**  lo indicaremos como **Δy.**

**Gráficamente:**



x x+Δx

y = f(x)

Δy

Δx

f(x+Δx)

f(x)

Donde **x** es el **valor inicial** ( sin incrementar) y **x + Δx** es el **valor incrementado**

Vemos que **Δy = valor final - valor inicial**

Es decir: **Δy = f(x+ Δx) - f(x)**

Se lee:

**Δy = la imagen de la fc. en el valor incrementado – la imagen de la fc. en el valor si incrementar**

Por ejemplo:

Dada la función **f(x) = 3 x + 1**

Queremos calcular el incremento que sufre esta función en el intervalo [2 , 6]

En este caso x = 2 y x + Δx = 6 es decir que Δx = 4

f(x) = 3 . 2 + 1 = 7 f(x+ Δx) = 3 . 6 +1 = 19

Δy = f(x+ Δx) - f(x) = 19 - 7 = **12**

Si queremos averiguar el incremento en otro intervalo cualquiera **[x , x + Δx ]**

trabajamos de la siguiente manera:

**f(x) = 3 x + 1**

**f(x+ Δx) = 3 . (x + Δx) + 1**

**Entonces : Δy = f(x+ Δx) - f(x) = [3 . (x + Δx) + 1 ] – (3 .x + 1 )**

**Δy = 3.x + 3.Δx + 1 - 3 x – 1 = 3 . Δx**

Esto nos permite calcular el incremento de la función, en cualquier intervalo.

En el intervalo [ 5 , 15 ] sería **Δx = 5** y **x + Δx = 15 Δx = 10**

**Entonces Δy = 3 . 10 = 30**

* **Variación Media De Una Función En Un Intervalo (Cociente incremental)**

Hemos visto que **Δy** nos permite averiguar el incremento sufrido por los valores de la función en un cierto intervalo [x , x + Δx ]

Pero qué pasa si queremos averiguar **la variación promedio de la función en dicho intervalo,** es decir **el incremento de los valores de la función por unidad de incremento de la variable x.**

En este caso se plantea el cociente de incrementos **o COCIENTE INCREMENTAL**

****

**Dicho cociente representa la variación media o promedio de la función en el intervalo** [x , x + Δx] , es decir cuánto varían los valores de la función por unidad de variación de x en dicho intervalo.

**Ejemplo:**

La relación entre la distancia recorrida en metros por un móvil y el tiempo en segundos es **y = f(t) = 6 t 2**. Calcular la velocidad media entre t = 1sg y t = 4sg

t0= 1 y tf  = 4 Δt = 3

f( 1 ) = 6 f(4) = 96 Δy = 96 – 6 = 90

la velocidad media es la variación media de la distancia respecto del tiempo:

vm = 30 m / sg

Es decir que en el intervalo [1 , 4] recorre 30m por sg

* **Interpretación Geométrica Del Cociente Incremental**

Veremos ahora qué representa el cociente incremental gráficamente.



x x+Δx

f(x+Δx)

f(x)

y = f(x)

Δy

Δx

A

B

Trazamos una recta secante a la curva que pase por A y por B



x x+Δx

f(x+Δx)

f(x)

y = f(x)

Δy

A

B

α

Δx

α es el ángulo que forma la recta S con el eje de abscisas llamado ángulo de inclinación. La pendiente de la recta S es la tangente del ángulo de inclinación, por lo tanto:

** m s = tg α = **

**O sea que el cociente incremental en el intervalo [x , x + Δx ] , representa la pendiente de la recta secante que pasa por el punto incrementado y el punto sin incrementar.**

* **Derivada De Una Función En Un Punto**

**Definición:**

Sea y = f(x) una función **continua** en un entorno del punto x, y Δx un incremento pequeño, si existe el límite del cociente incremental para Δx🡪0 , este se llama **derivada de la función en el punto x , y se anota f ’ (x)**

**En símbolos:**

****

Esta expresión se lee: la derivada de la función en el punto sin incrementar, es el límite del cociente entre la función en el punto incrementado menos la función en el punto sin incrementar, todo sobre el incremento de la variable independiente.

**La derivada representa la variación instantánea en el punto x , o variación puntual.**

Existen otras notaciones para la derivada:

f ’(x) se lee “f prima de x”

y ’ se lee “ y prima”

 se lee “ derivada de **y**  respecto de **x** ”

**Otra notación para la definición de derivada**

Si al punto sin incrementar se lo llama **a ,** al punto incrementado se lo llama **x** , entonces el incremento **Δx** sería **x – a .** Reemplazando en la definición de derivada nos quedaría:



Generalmente esta notación es más sencilla cuando se quiere calcular la derivada en un punto.



Δy

y = f(x)

f(x)

f(a)

a x

α

x-a

**Ejemplo I:**

**Dada la función y = x2 , hallar f ’(3)**

a = 3 f(x) = x2 f(3) = 9



**Ejemplo II:**

**Dada la función y = √x , hallar f ‘ (4)**

a = 4 f(x) = √x f(4) = 2



* **Función Derivable**

**Definición:**

**Una función y = f(x) es derivable en el punto x = a si y solo si existe la derivada en dicho punto.**

**Definición:**

**Una función y=f(x) es derivable en el punto x=a si y solo si existe la derivada en dicho punto.**

En los ejemplos anteriores la función y = x2 es derivable en a = 3 , y la función y=√x es derivable en el punto a = 4

**Una función es derivable en el intervalo ]b , c[ si es derivable en todo punto de ese intervalo.**

* **Interpretación Geométrica De La Derivada**

Hemos visto que la derivada en un punto da un número, veremos qué representa ese número gráficamente

Tracemos la recta secante que contiene por los puntos A y B



a x

f(x)

f(a)

y = f(x)

Δy

A

B

α

x-a

Recordemos que representa la pendiente de la recta secante

Veamos qué pasa con la recta secante en el gráfico si x 🡪a

* B se mueve sobre la curva hacia A
* la posición de la recta secante va cambiando , por lo tanto α también cambia

B

A

**La posición límite de la recta secante es la de la recta tangente a la curva en el punto A**

**T**

A =B

Vemos que cuando x 🡪a la recta secante tiende a la posición de la recta tangente en el punto sin incrementar, por lo tanto podemos decir que la pendiente de la secante tiende a la pendiente de la tangente. ( ms 🡪mt )

En símbolos:  pero 

O sea que : 

**f ’(a) = mt**

**La derivada en el punto x = a representa la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto (a ,f(a))**

* **Recta Tangente A Una Curva**

Podemos definir ahora recta tangente a una curva:

**Sea y = f(x) una función continua en x = a , y f ’(a) su derivada en x=a, la recta tangente a la gráfica de f en el punto (a , f(a)), es la recta que contiene a dicho punto y cuya pendiente es f ’(a)**

**Su ecuación está dada por:**

**t(x) = f ’(a) (x-a) + f(a)**

**Ejemplos:**

Hallar la recta tangente a la gráfica de las siguientes funciones en el punto indicado:

a) **f(x) = x 3** en (2 , 8 )

calculamos la derivada en a = 2



Reemplazamos en la fórmula de la recta tangente:

t(x)= 12. (x-2) + 8

**t(x)= 12x -16**

b) **g(x) =**  en (0 , 0 )

calculamos la derivada en a = 0



En este caso la función **no es derivable en el punto x=0, por que no existe la derivada**.

Pero qué pasa en este caso con la recta tangente? Analicemos el gráfico de esta función:



En el punto (0,0) hay un **punto cuspidal**, como la derivada no existe pero dio infinito, significa que la recta tangente tiene pendiente infinita, o sea **es vertical ( en este caso coincide con el eje de ordenadas)**

**x = 0**

**La ecuación de la recta tangente en este caso es**

c) h(x)=|x| en (0 , 0 )

calculamos la derivada en a = 0



Para resolver esta indeterminación debemos resolver el valor absoluto teniendo en cuenta que:

|x| = x si x ≥0 |x| = - x si x < 0

Por lo tanto hay que tomar límites laterales





Como los límites laterales dan ≠, no existe el límite del cociente, por lo tanto la función **no es derivable en el punto x=0, por que no existe la derivada**.

Pero qué pasa en este caso con la recta tangente? Analicemos el gráfico de esta función:



**Vemos que en el (0,0) hay un punto anguloso. Como la derivada no existe, tampoco existe la recta tangente**

* **Relación Entre Derivabilidad Y Continuidad**

**Teorema**

**Si la función y=f(x) es derivable en x=a , entonces es continua en dicho punto**

**Demostración:**

Por definición de derivada 

Por el teorema fundamental de límite: (toda función es igual a su límite más un infinitésimo)

 siendo  (un infinitésimo)

****  
aplicando límite en ambos miembros:







Remplazando nos queda:



**Lo que significa que es continua en dicho punto. Queda demostrado.**

**Aclaración:**

Este teorema quiere decir, que la continuidad es condición necesaria pero no suficiente para ser derivable. O sea que para ser derivable es necesario que sea continua pero con eso no basta, además debe existir la derivada.

Y ser derivable es condición suficiente pero no necesaria para ser continua. Es decir si es derivable SEGURO ES CONTINUA.

* **Función Derivada**

Dada una función **y=f(x**) con dominio **D** , se puede definir otra función **f ’(x)** con dominio D’, que a cada x de D’ le haga corresponder el valor de su derivada.

De acuerdo al caso **D ’  D**

**Ejemplo:**

Sea y = f(x) = x2 queremos hallar su función derivada

Calculamos la derivada por definición en un punto x = a genérico



Esto nos permite definir la función derivada reemplazando en el resultado a la a por x :

f’(x) = 2x

**Por lo tanto la función derivada de y = x 2 es y’ = 2x**

Veamos algunos otros ejemplos:

**Derivada de la función constante**

Dada la función constante f(x) = k , calcularemos su derivada por definición de derivada, es decir calculando el límite del cociente incremental:

**f ’(a) =  =**

**Por lo tanto: si f(x) = k entonces f ’(x) = 0**

**Derivada de la función identidad**

Dada la función identidad f(x) = x , calcularemos su derivada por definición de derivada, es decir calculando el límite del cociente incremental:

**f ’(a) =**

Por lo tanto: si f(x) = x entonces f ’(x) = 1

**( la derivada de la variable independiente es 1)**

**Derivada de la función seno**

Dada la función f(x) = sen x , calcularemos su derivada aplicando la definición.

**Por definición de derivada:**

**f ’(a) =  indeterminación**

Para salvar la indeterminación debemos factorear el numerador y así, poder simplificar.

Para ello utilizamos la siguiente fórmula de trigonometría que factoriza la diferencia de senos:

****

**En el ejercicio nos quedaría:**

**f ’(a)= **

Asociamos el denominador al primer factor, y el 2 que está multiplicando (en el numerador) lo pasamos al denominador, y distribuimos el límite en el producto:

**f ’(a)= **

**f ’(a)= **

Recordemos que por ser infinitésimos equivalentes :

****

El primer factor tiene ese formato, ya que si x tiende al valor a, entonces (x-a) tiende a cero.

Por lo tanto el primer límite da 1.

Nos queda:

**f ’(a)= **

**Luego nos queda : si f(x) = sen x entonces f ’ (x) = cos x**

**Derivada de la función coseno**

**Para calcular esta derivada se procede de igual manera que en el ejercicio anterior, pero la fórmula que se utiliza para factorear la diferencia de cosenos es la siguiente:**

****

**Llegamos al siguiente resultado:**

**si f(x) = cos x entonces f ’ (x) = - sen x**

**De esta manera se va haciendo con otras funciones, y se arma así la TABLA DE DERIVADAS**

* **Reglas De Derivación**

Sean y=f(x) e y=g(x) dos funciones derivables en x=a

Si queremos derivar las funciones suma, resta, producto y cociente de estas dos funciones debemos aplicar las siguientes reglas:

**Derivada de la suma:**

****

**Derivada de la resta:**

****

**Derivada del producto:**

****

****

**Derivada del cociente:**

****

**Ejemplos:**

* + - 1. 
      2. **
      3. 
      4. 

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 

**Derivada De La Función Compuesta (Regla de la cadena)**

**Composición de funciones:**

Dadas dos funciones f y g definidas de la siguiente manera:

f : A 🡪 B tal que u = f (x)

g : B 🡪 C tal que y = g (u)

Se llama función compuesta a la función que se obtiene aplicando primero f y al resultado obtenido se le aplica g , y se anota g(f(x))

f g

x u =f(x) g(u) = g(f(x))

Ej: 

Observe que si cambiamos el orden de la composición la función obtenida cambia, por eso decimos que la composición de funciones no es conmutativa



**Si queremos derivar una función compuesta debe aplicarse la siguiente regla:**

**Si tenemos dos funciones: u =f (x) y = g (u)**

****

O también 

**Ejemplos:**

1. **y= sen(x3) = sen u  **

**nos queda:**

****

**Reemplazando a u :**

**y’= cos(x3).3x2**

1. **y=ln(x2-2x) **
2. ** **
3.  

**Derivación Logarítmica**

Se utiliza para derivar funciones que tienen la siguiente forma:

Sean u= g(x) y v=f(x) dos funciones derivables, queremos derivar la siguiente expresión:



Aplicamos logaritmo natural en cada miembro:



por propiedad de logaritmo



Derivamos miembro teniendo en cuenta que y es una función compuesta



Despejamos ***y ’***

.derivación logarítmica

**Ejemplos:**

**a)** 





**Despejando:** 

Reemplazando y



**b)** 







**Ejercitación:**

a)

b) 

c) 

**Derivada De La Función Implícita**

Sea **F(x,y)=0** la forma implícita de la función y=f(x) que es derivable

Si conocemos la forma implícita F(x,y)=0 y queremos hallar la derivada de y=f(x) , según el caso, podemos explicitar la función:

F(x,y) = x2 -3x +y = 0 despejando y = x2 -3x entonces y ’ = 2x – 3

Pero a veces no se puede despejar la función y=f(x), en ese caso, la expresión se deriva miembro a miembro, teniendo en cuenta que al derivar la **y** , su derivada es **y’**

**Hallar de derivada de y = f(x)**

** 6x^2y + 5y^3 + 3x^2 = 12 - x^2y^2 \, **

**El término 6x2y se puede considerar que son dos funciones,  6x^2  y  y  por lo que se derivará como un producto, al igual que los otros términos:**

****

**Despejamos:**

****

**Sacamos factor común y’**

****

****

**Vemos que la función derivada en este caso también está en forma implícita**

**Ejercitación:**

**Derivar las siguientes funciones definidas implícitamente**

1. ****
2. ****

**Derivación Sucesiva**

Sea y = f(x) una función derivable en x=a , entonces podemos calcular su derivada en x = a



Si la función f ’(x) y también es derivable en x = a , podemos calcular la derivada de la derivada, que se llama **derivada segunda** de la función:



Si la función f ’’(x) y también es derivable en x = a , podemos calcular la derivada de la derivada segunda, que se llama **derivada tercera** de la función:



Y así se puede seguir derivando sucesivamente, si estas derivadas existen

**Ejemplos**:

1. y = x3 – 5x2 + 7 hallar 





 en este caso se podría derivar sólo una vez más

1. y = sen 2x hallar 





 en este caso, se podría seguir derivando infinitas veces,

* **Diferencial De Una Función**

**Definición:**

**Sea f(x) una función derivable en un entorno del punto x, y Δx un incremento pequeño . Diferencial de una función correspondiente al incremento Δx de la variable independiente, es el producto f'(x) · Δx. Se representa por dy.**

**dy = f ’(x). Δx**

**Notación:**

La diferencial de la variable independiente ( o sea y = x ) sería el producto de su derivada por el incremento, por lo tanto:

d(x) = dx = Δx o sea dx = 1 Δx

reemplazando en la definición de diferencial quedaría:  **dy = f ’ (x) . dx**

**Ejemplos**

**1. **

****

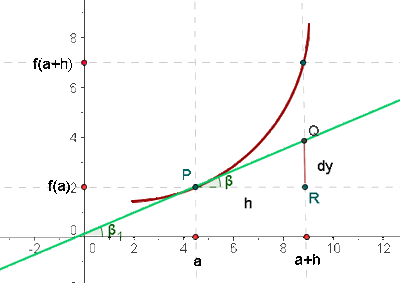
**2. **

****

**Interpretación Geométrica De La Diferencial**

Vamos a ver ahora que representa gráficamente la diferencial.

Para ello graficamos una función cualquiera derivable en un entorno del punto **x** , y trazamos la recta tangente a la curva en dicho punto



f(**x+Δx)**

f(x)

**x+Δx**

**x**x

Vemos que queda formado un triángulo rectángulo QPR, siendo β a ángulo de inclinación de la recta tangente

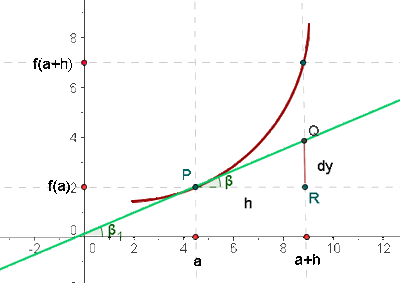
tg β = 

pero sabemos que tg β es la derivada de f(x) en x, entonces :

f ’(x) = 

despejando nos queda

**f ’(x). Δx = medida de QR o sea : dy = medida de QR**

****

f(**x+Δx)**

f(x)

X **x+Δx**

**x+Δx**

**La diferencial en un punto representa el incremento de la ordenada de la tangente, correspondiente a un incremento de la variable independiente.**

**Función Diferenciable**

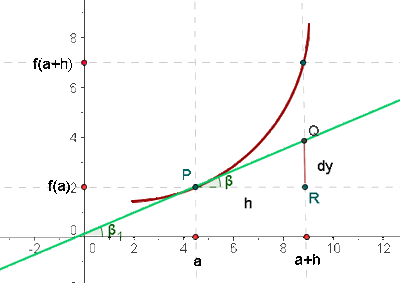
**Definición:**

Una función y = f(x) es diferenciable en un punto x si y sólo si :



siendo  un infinitésimo cuando Δx🡪0

Demostración: Si observamos nuevamente el gráfico



M

Δy

f(**x+Δx)**

f(x)

X **x+Δx**

**x+Δx**

**Medida de MR =Δy**

**Medida de MQ = Δy - dy**

**Cuando Δx 🡪0 MQ 🡪0 por lo tanto es un infinitésimo φ(x), reemplazando en la expresión anterior:**

**φ(x) = Δy - dy**

**Δy = dy + φ(x) queda demostrado**

**Si Δx es muy pequeño podríamos expresar que :**

****

**Aplicaciones De Diferencial**

Usando el concepto de función diferenciable, veremos una aplicación de la diferencial:

* **Cálculo del error propagado:**

En la práctica, muchas veces, se debe operar con valores obtenidos de mediciones. Generalmente los aparatos de medición tienen un margen de error o tolerancia. Si se opera con ese valor, el error del aparato se propaga al resultado, y este se llama **error propagado.**

**Por ejemplo:**

Dada la función y = f(x) , si

x representa el valor medido

Δx representa la tolerancia del aparato de medición

x+Δx representa el valor exacto

f(x+Δx) representa el resultado exacto

f(x) representa el valor obtenido de la función real

entonces la diferencia entre f(x+Δx) – f(x) nos da el error propagado

Δy = error propagado

Y si Δx es muy pequeño, sabemos que 

**Por lo tanto error propagado**

Veamos el siguiente ejemplo:

El volumen de una caja cúbica está dada por la fórmula **x 3** , siendo **x**  el valor de la arista medida con un aparato que tiene un error no superior a  . Estimar el error propagado en el volumen del cubo, si el valor medido de la arista es 5 cm.

En este caso:

x = 5 cm representa el valor medido

|Δx | < 0.01cm representa la tolerancia del aparato de medición

x+Δx (desconocido) representa el valor exacto

f(x+Δx) (desconocido) representa el resultado exacto

f(5) = 5 3 = 125 representa el valor obtenido del volumen del cubo

para calcular el error propagado debemos calcular la diferencial:

**v(x)= x3**  



El error propagado es cm 3

Este error es pequeño o grande? Para ello comparamos la dv con el valor de v

 este es **el error relativo**

El error porcentual se obtiene multiplicando el relativo por 100

**Error porcentual es de **

* **Aproximación lineal**

Cuando una función es diferenciable en x= a sabemos que :







Si observamos el segundo término es la ecuación de la recta tangente en el punto (a, f(a))

Esto quiere decir que podemos reemplazar la gráfica de f(x) por la de su recta tangente en un entorno del punto x = a

Ejemplo:

Hacer una aproximación lineal para calcular 

f(x) =  f ’ (x)= 

a = 4 x= 4.5 x - a = 0.5 f(a) = √4 =2 f ’(a)= 

Reemplazando en 

